EXERCICE N°1 : 20' 4 points

Pour tout entier non nul n on pose $I_n = \int_0^{\pi/4} tg^n x \, dx$.

1) Justifier l'existence de I_n. Montrer que la suite I est une suite décroissante à termes positifs.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de I_n.

EXERCICE N°2 : 25' 5 points

Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} \, dx$ et $u_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1) a) Calculer u_0 et montrer que u est décroissante.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$, puis déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(2n+5)\, u_{n+1} = (2n+2)\, u_n$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2^{2n+2}\, n!\, (n+1)!}{(2n+3)!}$.

c) Calculer alors $\int_0^1 (x^2 - 2x + 3)\sqrt{1-x} \, dx$.

EXERCICE N°3 : 30' 5 points

Soit I_n la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_0 = \int_0^{\pi/6} \sin(3x) \, dx$ et $I_n = \int_0^{\pi/6} x^n \sin(3x) \, dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1) *a)* Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.

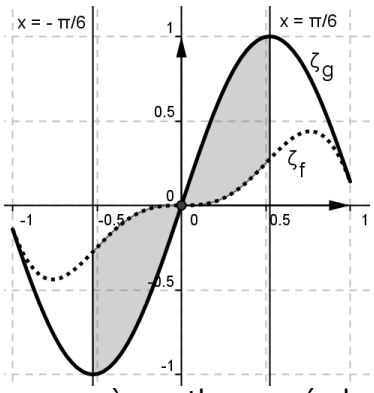
b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire que (I_n) est convergente.

2) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \leq \int_0^{\pi/6} x^n \, dx$.

b) Déterminer alors la limite de la suite (I_n).

3) a) Calculer I_0. Montrer que : $I_1 = \frac{1}{9}$.

b) En effectuant deux intégrations par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{n+2}{9}\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} - (n+1)\, I_n\right)$.



c) On a représenté ci-contre les courbes représentatives dans un repère orthonormé, des fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2 \sin(3x)$ et $g(x) = \sin(3x)$. Calculer l'aire de la partie grise.

EXERCICE N°4 : **30'** **5 points**

Soit f la fonction définie sur]-1/2 , +∞[par $f(x) = 1 + \dfrac{x - 1}{\sqrt{2x + 1}}$.

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Etudier la position de ζ_f par rapport à la droite Δ : y = x.

3) Tracer Δ et ζ_f .

4) Soit $I = \int_0^1 \dfrac{1 - x}{\sqrt{2x + 1}}\, dx$.

a) Donner une interprétation graphique de I.

b) Calculer I.

5) a) Montrer que f réalise une bijection de]-1/2 , +∞[sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer dans le même repère que ζ_f , la courbe de $\zeta_{f^{-1}}$.

c) Déterminer l'aire de la partie limitée par ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$.